1979

# écrit

## MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

---

### INTRODUCTION

Dans tout le problème, on considère un espace vectoriel euclidien E de dimension finie $n \geqslant 2$, un entier $k \geqslant 2$ et un réel $\gamma \in ]\,0\,,1\,[$. Les entiers $n$ et $k$ et le réel $\gamma$ pourront être assujettis à des conditions supplémentaires qui dépendront de la question traitée.

On se propose d'étudier certaines familles finies de vecteurs de E (Partie II) et certains ensembles finis de droites vectorielles de E, appelés épis (Partie III). La Partie I rassemble des résultats préliminaires. Dans la Partie IV, on examine quelques propriétés d'un épi particulier.

### NOTATIONS

Si $v$ , $v'$ appartiennent à E, leur produit scalaire est noté $(v \mid v')$, et on pose $\| v \| = \sqrt{(v \mid v)}$. On note L(E) l'algèbre des endomorphismes de E, $L^s(E)$ l'espace des endomorphismes symétriques de E et O(E) le groupe orthogonal de E.

Pour tout $v \in E$, on désigne par $p_v$ l'endomorphisme de E tel que

$$p_v(v') = (v \mid v')\, v \qquad \text{pour tout} \quad v' \in E.$$

On définit une opération de O(E) sur l'ensemble $E^k$ en posant, si $f \in O(E)$ et si $x = (x_1\,, x_2\,, \ldots, x_k) \in E^k$, $f \,.\, x = \big(f(x_1)\,,\, f(x_2), \ldots, f(x_k)\big)$.

Par abus de notation, $x$ pourra aussi désigner la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.

Si Y est un ensemble, on note Card (Y) le cardinal de Y, $\mathfrak{S}(Y)$ le groupe des permutations de Y et $id_Y$ l'application identique de Y. Si de plus $h$ est un entier naturel, $Y^{(h)}$ désigne l'ensemble des parties de cardinal $h$ de Y.

Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $m(\lambda\,, P)$ le plus grand entier naturel $m$ tel que $(X - \lambda)^m$ divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

On désigne par $\mathfrak{M}_k$ l'espace des matrices, à $k$ lignes et $k$ colonnes, à termes réels ; si $A \in \mathfrak{M}_k$, on note $P_A$ le polynôme caractéristique de A ;

l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_k$ est noté $\mathcal{M}_k^s$ ; si $B \in \mathcal{M}_k^s$, $\lambda(B)$ désigne la plus petite valeur propre de B.

On note enfin $I_k$ la matrice unité de $\mathcal{M}_k$ et $J_k$ la matrice de $\mathcal{M}_k$ dont tous les termes sont égaux à 1.

## PARTIE I

*Les questions* 1, 2, 3 *sont indépendantes les unes des autres. Les questions* 4 *et* 5 *sont indépendantes des précédentes.*

*1.* Déterminer le rang et la trace de $J_k$ ; en déduire $P_{J_k}$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont des réels quelconques, former le polynôme caractéristique et calculer les valeurs propres de la matrice $\alpha I_k + \beta J_k$.

*2. a.* Soit Q un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que toute racine complexe de Q est simple.

*b.* Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$. Soit $\lambda$ une racine complexe de P telle que $m(\lambda, P) > \frac{1}{2}$ degré (P). Montrer que $\lambda$ appartient à $\mathbb{Q}$.

*3.* Si $f \in L(E)$, $\operatorname{Tr}(f)$ désigne la trace de $f$. Démontrer que $L^s(E)$, muni de la forme bilinéaire symétrique $(f, f') \longmapsto \langle f, f' \rangle = \operatorname{Tr}(f \circ f')$, est un espace vectoriel euclidien.

*4.* A tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k$, on associe la matrice $B_x = \big( (x_i \mid x_j) \big)$, élément de $\mathcal{M}_k^s$ ($(x_i \mid x_j)$ est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $B_x$).

L'espace $\mathbb{R}^k$ étant muni du produit scalaire usuel, noté $(\ \mid\ )_{\mathbb{R}^k}$, pour lequel la base canonique $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ est orthonormale, $\varphi_x$ désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans E telle que $\varphi_x(\varepsilon_i) = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On désigne par $\varphi_x^*$ l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $v \in E$ et tout $w \in \mathbb{R}^k$,

$$(w \mid \varphi_x^*(v))_{\mathbb{R}^k} = (\varphi_x(w) \mid v).$$

*a.* Montrer que $B_x$ est la matrice de $\varphi_x^* \circ \varphi_x$ dans la base $\varepsilon$. En déduire les égalités $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(B_x) = k - m(0, P_{B_x})$. Montrer que $\lambda(B_x) \geqslant 0$, et que l'égalité a lieu si et seulement si la famille $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est liée.

*b.* Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{x_i}$. Montrer que $\varphi_x \circ \varphi_x^* = \sum_{i=1}^{k} p_i$.

En déduire que $B_x$ et $\sum_{i=1}^{k} p_i$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

*5. a.* Soit $B \in \mathcal{M}_k^s$. Montrer qu'il existe $x \in E^k$ tel que $B = B_x$ si et seulement si $\lambda(B) \geqslant 0$ et $\operatorname{rang}(B) \leqslant n$.

*b.* Soient $x$, $y$ des éléments de $E^k$. Montrer que $B_x = B_y$ si et seulement si $x$ et $y$ ont même orbite sous l'action de O (E).

## PARTIE II

On note U l'ensemble des vecteurs unitaires de E. Une famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k$ est dite équiangulaire d'angle $\operatorname{Arc}\cos\gamma$ si $|(u_i \mid u_j)| = \gamma$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

L'ensemble des familles équiangulaires $u \in U^k$ d'angle Arc cos $\gamma$ est noté $U^k_\gamma$.

On désigne par $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}^s_k$ telles que $a_{i,i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $a_{i,j} \in \{1, -1\}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

A tout $u \in U^k_\gamma$, on associe la matrice $A_u = \dfrac{1}{\gamma}(B_u - I_k)$, de sorte que $A_u \in \mathcal{A}_k$.

On dit qu'une famille équiangulaire $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est aiguë (resp. obtuse) si $(u_i \mid u_j) > 0$ (resp. $(u_i \mid u_j) < 0$) pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

*6. a.* Démontrer que toute famille équiangulaire aiguë est libre.

*b.* Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire aiguë $u \in U^n_\gamma$.

*7. a.* Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k_\gamma$. Démontrer que si la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée,

$$\lambda(A_u) = -\frac{1}{\gamma} \text{ et } m\left(-\frac{1}{\gamma}, P_{A_u}\right) = k - \text{rang}(u).$$

*b.* Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire obtuse $u \in U^{n+1}_{1/n}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que $U^k_\gamma$ n'est pas vide, et on désigne par $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ un élément de $U^k_\gamma$ ; pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{u_i}$.

*8. a.* Démontrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $p_i$ appartient à $L^s(E)$.

*b.* Calculer $< p_i, p_j >$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

*c.* Démontrer que $k \leqslant \dfrac{1}{2} n(n+1)$.

*9.* On désigne par $\Pi$ le sous-espace vectoriel de $L^s(E)$ engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$. Montrer que $n \geqslant \dfrac{k}{[1 + (k-1)\gamma^2]}$, et que l'égalité a lieu si et seulement si $id_E$ appartient à $\Pi$ ; démontrer que $id_E \in \Pi$ implique $k\, id_E = n \sum_{i=1}^{k} p_i$. (On pourra considérer la projection orthogonale de $id_E$ sur $\Pi$).

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on note $d_{i,j}$ le nombre d'entiers $t$ tels que $1 \leqslant t \leqslant k$, $t \neq i$, $t \neq j$, et $(u_i \mid u_j)(u_i \mid u_t)(u_j \mid u_t) > 0$. On dit que la famille équiangulaire $u$ est régulière si $d_{i,j}$ est indépendant du couple $(i, j)$.

Si $A_u = (\alpha_{i,j})$, on pose $A^2_u = (\alpha'_{i,j})$.

*10. a.* Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, calculer $\alpha'_{i,j}$ en fonction de $k$, $\alpha_{i,j}$ et $d_{i,j}$.

*b.* Montrer que la famille $u$ est régulière si et seulement s'il existe des réels $\rho_1$, $\rho_2$ tels que $(A_u - \rho_1 I_k)(A_u - \rho_2 I_k) = 0$.

*c.* Démontrer que $id_E$ appartient à $\Pi$ si et seulement si la famille $u$ est liée, de rang $n$ et régulière ; montrer que, dans ce cas, les valeurs propres de $A_u$ sont $-\dfrac{1}{\gamma}$ et $\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{k}{n} - 1\right)$ avec les multiplicités respectives $k - n$ et $n$.

*11. Cette question est indépendante des questions 8, 9, 10.* — On suppose que la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée et que « $k$ est pair, ou $k - \text{rang}(u) \geqslant 2$ ».

Démontrer que si $\dfrac{1}{\gamma^2}$ est entier, cet entier est impair. (On pourra considérer

le polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ obtenu par réduction, modulo 2, du polynôme caractéristique de $A_u^2$).

*12.* Démontrer que si $\mathrm{id}_E$ appartient à $\Pi$ et si $k$ est distinct de $n+1$ et de $2n$, $\dfrac{1}{\gamma}$ est un entier impair.

*13.* *a.* Démontrer que si $k > 2n$, $\dfrac{1}{\gamma}$ est un entier impair. (On pourra utiliser la question *2.*).

*b.* Montrer que $n = 6$ implique $k \leqslant 16$.

*14.* On suppose que $k = \dfrac{1}{2} n (n+1)$. Montrer que $n + 2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$. En déduire que si $n > 3$, $n+2$ est le carré d'un entier impair.

## PARTIE III

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble fini ($\mathrm{Card}\,\mathcal{D} \geqslant 2$) de droites vectorielles de E, on appelle repère de $\mathcal{D}$ toute famille $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ telle que, pour toute droite $D \in \mathcal{D}$, $u_D$ soit un vecteur unitaire de D ; un tel repère est dit aigu si $(u_D \mid u_{D'}) > 0$ pour tout couple $(D, D')$ de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est un *épi* d'angle $\operatorname{Arc\,cos} \gamma$ si $\mathcal{D}$ possède un repère $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ tel que $|(u_D \mid u_{D'})| = \gamma$ pour tout couple $(D, D')$ de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On appelle « base aiguë » de E tout épi de cardinal $n$ possédant un repère aigu.

On considère dans toute cette partie une « base aiguë » $\mathcal{B}$ de E d'angle $\operatorname{Arc\,cos}\gamma$ et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$, et on suppose que $k > n$. On se propose d'étudier les épis $\mathcal{D}$, de cardinal $k$, contenant $\mathcal{B}$.

Pour toute partie S de $\mathcal{B}$, on pose $e_S = \sum\limits_{D \in S} u_D$, et on note $v_S$ l'unique élément de E tel que, pour toute droite $D \in \mathcal{B}$, on ait

$$(v_S \mid u_D) = -\gamma \quad \text{si } D \in S, \quad (v_S \mid u_D) = \gamma \quad \text{si } D \notin S.$$

On pose $r = \dfrac{1-\gamma}{2\gamma}$ et $\Phi = X^2 - nX + r^2(n + 2r + 1)$ ($\Phi$ est donc un élément de $\mathbb{C}[X]$) ; on considère la condition suivante :

$$(*) \qquad \text{les racines de } \Phi \text{ sont entières.}$$

Lorsque la condition $(*)$ est satisfaite, on note $h$ la plus petite racine de $\Phi$, et on pose

$$z = h - r^2 \quad \text{et} \quad z' = h - r(r+1).$$

*15.* Soient S, T des parties de $\mathcal{B}$.

*a.* Calculer $(e_S \mid e_T)$, $\| e_S \|^2$, $(e_{\mathcal{B}} \mid e_S)$, $\| e_{\mathcal{B}} \|^2$ en fonction de $n$, $r$, Card(S), Card (T) et Card ($S \cap T$).

*b.* Montrer que $v_S = \omega_S e_{\mathcal{B}} - \dfrac{1}{r} e_S$, où $\omega_S$ est un nombre réel que l'on calculera en fonction de $n$, $r$ et Card (S). Calculer $\| v_S \|^2$ en fonction de $n$, $r$ et Card(S). Vérifier que $\| v_S \| = 1$ si et seulement si Card (S) est racine de $\Phi$.

*c.* On suppose que Card(S) = Card (T) et que $\| v_S \| = 1$. Calculer $(v_S \mid v_T - v_S)$ puis $(v_S \mid v_T)$ en fonction de $r$, Card (S) et Card ($S \cap T$). En déduire que

$$(v_S \mid v_T) = \gamma \quad \text{si et seulement si } \mathrm{Card}(S \cap T) = \mathrm{Card}(S) - r^2,$$

$$(v_S \mid v_T) = -\gamma \quad \text{si et seulement si } \mathrm{Card}(S \cap T) = \mathrm{Card}(S) - r(r+1).$$

*16.* Montrer qu'il existe un épi, de cardinal $k$, contenant $\mathcal{B}$ si et seulement si la condition $(*)$ est satisfaite et s'il existe une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition suivante :

$$(**) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \text{Pour tout couple } (S, T) \text{ d'éléments distincts de } \mathcal{S}, \text{ Card } (S \cap T) \\ & \quad \text{appartient à } \{z, z'\}. \\ \text{(ii)} & \text{Card } (\mathcal{S}) = k - n. \end{cases}$$

Jusqu'à la fin de cette partie, sauf dans la question *19*, on suppose que $\mathcal{Q}$ est un épi, de cardinal $k$, contenant $\mathcal{B}$ ; $h, z, z'$ sont alors définis comme il a été précisé plus haut.

*17.* *a.* Montrer que $n \geqslant 2r(2r+1)$.

*b.* Calculer $z(n - h - r^2)$ en fonction de $r$.

*c.* On suppose que $r = 1$ (resp. 2). Démontrer que le couple $(n, h)$ appartient à un ensemble de cardinal 2 (resp. 5) que l'on précisera.

*18.* On suppose dans cette question que $k \geqslant n + 2$ et que $r$ n'est pas entier. Montrer que $r$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Soient

$$a = r(r+1) \quad \text{et} \quad b = r^2(n + 2r + 1).$$

De l'égalité $(n - 2a - 1)r + b - a(n-1) = 0$, déduire que $n = 3$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

*19.* On suppose que $n = 3$ (resp. 6). Démontrer qu'il existe un épi de cardinal 6 (resp. 16), et une famille équiangulaire régulière appartenant à $U^6$ (resp. $U^{16}$).

*20.* Dans cette question on suppose que $k = \dfrac{1}{2} n(n+1)$ et $n > 3$.

*a.* Démontrer que $h^2 - (4r^2 + 4r - 1)h + 2r^3(2r+3) = 0$.

*b.* On pose $s = 2r - 1$. Démontrer que ou bien $s = 1$, ou bien il existe deux entiers $c, d$ tels que $s = 3c^2$ et $3c^4 + 5c^2 + 1 = d^2$.

En déduire que si $n < 10^4$, $n \in \{7, 23, 839\}$.

On note $\Gamma$ le stabilisateur de $\mathcal{Q}$ dans O (E) et $\pi$ l'homomorphisme de $\Gamma$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ qui à tout $f \in \Gamma$ associe la permutation de $\mathcal{Q}$ induite par $f$. On pose enfin $G = \pi(\Gamma)$. Préciser le noyau de $\pi$.

*21.* On suppose que $h$ est distinct de $\dfrac{n}{2}$. On suppose en outre que deux parties quelconques de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$ peuvent être transformées l'une en l'autre par un élément de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

*a.* Montrer que G permute transitivement les « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{Q}$.

*b.* Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{B}$ dans G est isomorphe au stabilisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

## PARTIE IV

*Cette partie est indépendante de la* PARTIE II

On suppose que $n = 7$, et l'on pose $Y = \{1, 2, \dots, 7\}$. On considère une « base aiguë » $\mathcal{B} = \{D_1, D_2, \dots, D_7\}$ de E d'angle $\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right)$, et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$. Si $i \in Y$, on pose $u_i = u_{D_i}$. Quel que soit $(i, j)$, élément de $Y^2$, tel que $i < j$, on pose

$$v_{i,j} = \frac{1}{3}\left\{\left(\sum_{t \in Y,\ t \notin \{i,j\}} u_t\right) - 2(u_i + u_j)\right\} \quad \text{et} \quad D_{i,j} = \mathbb{R}v_{i,j}.$$

Enfin on pose $\mathcal{D} = \{D_i \,;\, (i \in Y)\} \cup \left\{D_{i,j} \,;\, \left((i,j) \in Y^2 \text{ et } i < j\right)\right\}$.

*22.* Montrer que $\mathcal{D}$ est un épi d'angle $\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right)$ et de cardinal 28.

On conserve les notations $\Gamma$, $\pi$, G introduites dans la partie III, et on note $\Omega$ l'ensemble des « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{D}$. Pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, on désigne par $G_{\mathcal{L}}$ le stabilisateur de $\mathcal{L}$ dans G, et par $\sigma_{\mathcal{L}}$ l'homomorphisme de $G_{\mathcal{L}}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ qui à tout $g \in G_{\mathcal{L}}$ associe la permutation de $\mathcal{L}$ induite par $g$.

*23.* Démontrer que chacun des ensembles suivants appartient à $\Omega$ :

$\mathcal{L}_1 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j} \,;\, (2 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_2 = \{D_i \,;\, (1 \leqslant i \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$,

$\mathcal{L}_3 = \{D_1, D_2\} \cup \{D_{1,2}\} \cup \{D_{3,j} \,;\, (4 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_4 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j} \,;\, (2 \leqslant j \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$.

*24.* Montrer que G permute transitivement les éléments de $\Omega$ et que, pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, $\sigma_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

*25.* *a.* Montrer que les orbites des $\mathcal{L}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sous l'action de $G_{\mathcal{B}}$ forment une partition de $\Omega - \{\mathcal{B}\}$. Montrer que $\operatorname{Card}(\Omega) = 288$.

*b.* Calculer le cardinal de G.

*26.* Vérifier que toute partie de cardinal 2 de $\mathcal{D}$ est contenue dans un élément de $\Omega$. Montrer qu'étant donnés des couples $(D, D')$ et $(\Delta, \Delta')$ de droites de $\mathcal{D}$ tels que $D \neq D'$ et $\Delta \neq \Delta'$, il existe $g \in G$ tel que $g(D) = \Delta$ et $g(D') = \Delta'$.